2. Ecuații diferențiale de ordinul I

Ecuațiile diferențiale de ordinul I au forma

$$F\left(x, y, y'\right) = 0.$$

Cel mai adesea ele sunt scrise în formã explicitã $y' = f\left(x, y\right)$. Soluția lor generalã depinde de o singurã constantã.

Nu orice ecuație diferențialã de ordinul I poate fi rezolvatã analitic.

Din punctul de vedere al rezolvãrii analitice existã douã categorii importante de ecuații :

- ecuații fundamentale (ecuațiile cu variabile separabile, ecuațiile liniare, ecuații cu diferentiale totale)
- ecuații reductibile la ecuații fundamentale (ecuații omogene si reductibile la ecuații omogene, ecuații care admit factor integrant, ecuații de tip Bernoulli, de tip Riccati, de tip Lagrange, de tip Clairaut etc)

Este foarte importantã cunoaşterea algoritmului de rezolvare a ecuațiilor fundamentale precum şi a metodelor de reducere a celorlalte ecuații la ecuații fundamentale.

1. Ecuații cu variabile separabile

Forma generalã a ecuației este

$$y' = f\left(x\right) \cdot g\left(y\right) \qquad (3)$$

unde f, g sunt funcții reale date, continue pe domeniul lor de definiție.

Soluțiile ecuației $g\left(y\right) = 0$ sunt soluții, de obicei singulare, ale ecuației (3).

Dacã $g\left(y\right) \neq 0$ rezolvarea constã in separarea variabilelor urmatã de integrare.

Metoda de rezolvare:

- se rezolvã ecuația $g\left(y\right) = 0$ cu soluțiile $y_1, y_2, ..., y_k$
- se scriu soluțiile singulare ale ecuației : $y\left(x\right) = y_1,\ y\left(x\right) = y_2, ..., y\left(x\right) = y_k$. Domeniul lor de definiție este domeniul de definiție al funcției *f*.
- se scrie ecuația sub forma $\dfrac{y'}{g(y)} = f\left(x\right)$ (ceea ce este posibil pentru $g(y) \neq 0$) şi se obține integrala generalã a ecuației : $\displaystyle\int \frac{dy}{g\left(y\right)} = \int f\left(x\right) dx + C$, adicã forma implicitã a soluției.
- din integrala generalã se calculeazã (dacã este posibil) y şi se obține forma explicitã a soluției.

Observaţie : Soluţia particularã a ecuaţiei (3) care îndeplineşte condiţia iniţialã $y(x_0)=y_0$ este datã de $\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{g(s)}=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Ea se poate obţine din soluţia explicitã impunând condiţia iniţială.

O formã particularã a ecuaţiei cu variabile separabile este $y'=f(x)$. Soluţia generalã a acestei ecuaţii este $y(x)=\int f(x)dx$

Exemple : Sã se rezolve

1. $y'=x^2+\sin x$

Soluţia generalã este $y(x)=\int(x^2+\sin x)dx=\frac{x^3}{3}-\cos x+C$

2. $y'=\frac{x}{x^2+1}$

Soluţia generalã este $y(x)=\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

3. $y'=-\frac{y}{x}$

In acest caz $f(x)=-\frac{1}{x}$ şi $g(y)=y$, deci ecuaţia $g(y)=0$ are soluţia $y=0$ şi funcţia $y_s:R-\{0\}\to R,\ y_s(x)=0$ este soluţie singularã a ecuaţiei.

Dacã $y\neq 0$ ecuaţia devine $\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x}$ şi integrala ei generalã este $\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{1}{x}dx$.

Rezultã $\ln|y|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+C_1\overset{notatie}{=}\ln\left|\frac{1}{x}\right|+\ln C=\ln C\left|\frac{1}{x}\right|$, unde $C>0$ este o constantă arbitrară. Rezultă $y=\pm\frac{C}{x},\ C>0$. In acest caz soluţia generală se scrie sub forma $y:R-\{0\}\to R,\ y(x)=\frac{C}{x},\ C\neq 0$.

Inlocuind $C=0$ în soluţia generală se obţine soluţia singulară y_s. Aceasta nu este însă o soluţie particulară deoarece valoarea $C=0$ nu este acceptabilă în cadrul soluţiei generale.

2. Ecuaţii liniare

Forma generalã a ecuaţiei liniare este

$$y'=P(x)\cdot y+Q(x) \qquad (4)$$

unde $P,Q:I\to R$ sunt funcţii date, continue pe domeniul de definiţie.

Această ecuaţie se rezolvã prin metoda variaţiei constantei.

Metoda de rezolvare (metoda variației constantei)

- se rezolvã ecuația omogenã $y' = P(x)\cdot y$ care este o ecuație cu variabile separabile și se obține soluția nenulã $y = C\cdot e^{\int_a^x P(x)dx} \overset{notatie}{=} C\cdot f(x)$
- se considerã constanta C ca fiind funcție de x, adicã se scrie $y(x) = C(x)\cdot f(x)$
- se calculeazã $y'(x) = C'(x)f(x) + C(x)f'(x)$ și se introduce in ecuația (4); termenii care conțin pe $C(x)$ se reduc și se obține o ecuație mai simplã de forma $C'(x) = g(x)$.
- se rezolvã ecuația $C'(x) = g(x)$ și se obține soluția $C(x) = \int g(x)dx + K$
- se introduce expresia lui $C(x)$ în $y(x) = C(x)f(x)$ și se obține forma explicitã a soluției ecuației (4).

Observație : Forma explicitã a soluției ecuației (4) , pentru x_0 fixat, este

$$y(x) = \left[K + \int_{x_0}^{x}\left(Q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} P(t)dt}\right)ds\right]\cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}.$$

Aceastã expresie se obține folosind algoritmul anterior dar e dificil de memorat și de aceea se recomandã folosirea algoritmului pentru rezolvarea fiecãrei ecuații.

Exemplu : Sã se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y' = y\cdot ctgx + 2x\cdot\sin x \\ y(\pi/2) = a \end{cases}$

Funcția $ctgx$ nu este definitã in punctele $n\pi,\ n\in N$. Din cauza condiției inițiale se va cãuta soluția generalã a ecuației pe intervalul $(0.\pi)$.

Ecuația omogenã $y' = y\cdot ctgx$ are integrala generalã $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Rezultã $\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1 = \ln(C|\sin x|)$ care dã soluția $y(x) = C\sin x$

Se aplicã variația constantei, adicã se considerã $y(x) = C(x)\sin x$.

Introducând $y'(x) = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$ în ecuația neomogenã obținem

$C'(x)\sin x + C(x)\cos x = C(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x} + 2x\sin x$. Termenii conținând factorul $C(x)$ se reduc și se obține ecuația $C'(x) = 2x$ cu soluția $C(x) = x^2 + K$.

Introducând aceastã expresie în forma lui $y(x)$ obținem soluția generalã a ecuației, anume

$y:(0,\pi)\to R,\ y(x) = (x^2 + K)\sin x$ unde $K\in R$ este o constantã arbitrarã.

Din condiția $y(\pi/2)=a$ rezultã $\left(\frac{\pi^2}{4}+K\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$, adicã $K=a-\frac{\pi^2}{4}$. Deci soluția problemei Cauchy este $y:(0,\pi)\to R,\ y(x)=\left(x^2+a-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$.

3. Ecuații cu diferențialã totalã

Forma generalã a ecuației este

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (5)$$

unde P,Q sunt funcții date, de clasã C^2 pe domeniul $D\subset R^2$ şi satisfac relația $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ pentru orice $(x,y)\in D$.

Rezolvarea ecuației se bazeazã pe faptul cã existã funcții de forma

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

astfel încât $dU_{(x,y)}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Spunem în acest caz cã ecuația are diferențialã totalã. Ea se scrie sub forma $dU_{(x,y)}=0$, deci soluția ecuației (5) va fi datã în forma implicitã de relația $U(x,y)=C$.

Metodã de rezolvare

- se identificã în ecuație $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ şi se verificã egalitatea
  $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$
- se determinã funcția U
- se scrie soluția ecuației sub formã implicitã $U(x,y)=C$. Dacã este posibil, din aceastã egalitate se aflã y în funcție de x şi se obține forma explicitã a soluției.

Exemplu : Sã se determine soluția generalã a ecuației
$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.

In acest caz $P(x,y)=x+y+1$ şi $Q(x,y)=x-y^2+3$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=1$

$$U(x,y)=\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt=\int_0^x(t+1)dt+\int_0^y\left(x-t^2+3\right)dt=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y$$

.

Soluția generalã a ecuației este datã sub formã implicitã de relația

$$\frac{x^2}{2}+x+3y+xy-\frac{y^3}{3}=C\ .$$

Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic în raport cu necunoscuta y, deci nu se poate preciza forma explicită a soluției.

4. Ecuații reductibile la ecuații fundamentale

Tehnica generală de rezolvare a acestui tip de ecuații este următoarea :
- se reduce ecuația la o ecuație fundamentală
- se rezolvă ecuația fundamentală
- se scrie soluția ecuației inițiale folosind soluția celei fundamentale

4.1 Ecuatii omogene

Forma generală a unei ecuații omogene este $y' = f\left(y/x\right)$

Prin schimbarea de variabilă $z\left(x\right)=\dfrac{y\left(x\right)}{x}$ se obține o ecuație cu variabile separabile.

Exemple : Să se determine soluția generală a ecuației $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

Pentru $x \neq 0$ ecuația se scrie $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$. Cu schimbarea de variabilă $z\left(x\right)=\dfrac{y\left(x\right)}{x}$, adică $y\left(x\right)=x\cdot z\left(x\right)$, ecuația devine $z\left(x\right)+xz'\left(x\right)=z\left(x\right)+\sqrt{1+z^2\left(x\right)}$, care este o ecuație cu variabile separabile, anume $z'=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+z^2}$. Integrala generală a ecuației este $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{1}{x}dx$, adică $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln|x|+C_1=\ln\left(C|x|\right)$. Rezultă $z+\sqrt{1+z^2}=Cx$, adică $z(x)=\dfrac{C^2x^2-1}{2C|x|}$. Soluția generală a ecuației este

$$y : R-\{0\}\to R,\quad y\left(x\right)=x\frac{C^2x^2-1}{2C|x|}$$

4.2 Ecuații reductibile la ecuatii omogene sau cu variabile separabile

Ecuațiile având forma generală $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ pot fi reduse la ecuații omogene sau cu variabile separabile astfel :

- dacă $a/a' \neq b/b'$ se rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ care are soluția $\left(x_0, y_0\right)$. Prin schimbarea de variabile $x=u+x_0,\;\; y=v+y_0$
se obține o ecuație omogenă cu variabila independentă u și funcția necunoscută v.

- dacã $a/a'=b/b'$ se foloseşte substituţia $z=ax+by$ şi ecuaţia se transformã într-o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemple: 1. $(2x+3y-1)-(x-y-3)y'=0$

Ecuaţia se scrie sub forma $y'=\dfrac{2x+3y-1}{x-y-3}$ deoarece $y=x-3$ nu este soluţie a ecuaţiei. Sistemul $\begin{cases}2x+3y-1=0\\ x-y-1=0\end{cases}$ are solutia unicã $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$.

Se face substituţia $\begin{cases}x=u+2\\ y=v-1\end{cases}$ şi se obţine ecuaţia omogenã $(2u+3v)+(v-u)v'=0$ cu funcţia necunoscutã v. Notând $z=\dfrac{v}{u}$, adicã $v=zu$ ecuaţia se reduce la ecuaţia cu variabile separabile $z'=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{z^2+2z+2}{1-z}$. Integrala generalã a acestei ecuaţii este $\displaystyle\int\frac{1-z}{z^2+2z+2}dz=\int\frac{1}{u}du$. Calculând cele douã integrale obţinem

$\dfrac{\ln\left(z^2+2z+2\right)}{2}-2arctg(z+1)=\ln u+C$.

Tinând cont cã $z=\dfrac{v}{u}=\dfrac{y+1}{x-2}$ se obţine soluţia generalã sub formã implicitã

$$\ln\left((y+1)^2+2(x-2)(y+1)+2(x-2)^2\right)-4arctg\frac{x+y-1}{x-2}=0.$$

Forma explicitã a soluţiei nu se poate determina.

2. $(4x+6y+4)-3(6x+9y-2)y'=0$

Ecuaţia se scrie sub forma $y'=\dfrac{4x+6y+4}{3(6x+9y-2)}$ .Deoarece $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{4}{18}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{6}{27}$ se va folosi substituţia $2x+3y=z$. Din $y=\dfrac{z-2x}{3}$ rezultã $y'=\dfrac{z'-2}{3}$. Ecuaţia devine $\dfrac{z'-2}{3}=\dfrac{2z+4}{9z-6}$ adicã $z'=\dfrac{8z}{3z-2}$. Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile care se poate scrie sub forma $\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4z}\right)z'=1$.

Integrala generalã a acestei ecuaţii conduce la relaţia $\dfrac{3}{8}z-\dfrac{1}{4}\ln z=x+C$. Tinând cont de expresia lui z se obţine soluţia generalã a ecuaţiei iniţiale, soluţie scrisã sub formã implicitã :

$3(2x+3y)-\ln(2x+3y)^2-8x=C$.

Nici în acest caz nu se poate preciza forma explicitã a soluției.

4.3 Ecuații ce admit factor integrant

Au forma generala $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ cu $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ dar pentru care existã funcția $\mu=\mu(x,y)\neq 0$, numitã factor integrant, astfel încât $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

Dacã factorul integrant $\mu(x,y)$ poate fi determinat, atunci ecuația $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)=0$ este o ecuație cu diferențialã totalã, echivalentã cu cea inițialã.

Nu toate ecuațiile au factor integrant, existã doar câteva cazuri importante dintre care menționăm:

- dacã $\dfrac{\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x}{Q}$ depinde doar de x atunci existã factor integrant ce depinde doar de x si $\mu=\mu(x)$ satisface ecuația $\mu'=\mu\dfrac{\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x}{Q}$ (4.3.1)

- dacã $\dfrac{\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y}{P}$ depinde doar de y atunci atunci existã factor integrant ce depinde doar de y si $\mu=\mu(y)$ satisface ec. $\mu'=\mu\dfrac{\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y}{P}$ (4.3.2)

Pentru rezolvarea ecuațiilor cu factor integrant se parcurg urmãtoarele etape :

- se determinã factorul integrant rezolvând ecuațiile diferențiale (4.3.1) sau (4.3.2)
- se scrie ecuația cu diferențiale totale corespunzãtoare
- se rezolvã ecuația cu diferențiale totale (cu necunoscuta $y=y(x)$) şi se obține astfel soluția ecuației inițiale.

Exemplu : $\left(4x+3y+3y^2\right)dx+(2xy+x)dy=0$.

In acest caz $P(x,y)=4x+3y+3y^2$ şi $Q(x,y)=2xy+x$.

Rezultã cã $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6y+3$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y+1$. Ecuația nu are diferențialã totalã deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Totuşi $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{2}{x}$ depinde numai de x, deci se poate alege un factor integrant de forma $\mu=\mu(x)$. El va satisface ecuația $\mu'=\mu\cdot\dfrac{2}{x}$ care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția $\mu(x)=x^2$. Din înmulțirea cu x^2 a ecuației inițiale se obține ecuația cu diferențialã totalã

$\left(4x^3+3x^2y^2+3x^2y\right)dx+\left(2x^2y+x^3\right)dy=0$.

- Funcția $U(x,y)=\int_0^x 4t^3dt+\int_0^y\left(2x^2t+x^3\right)dt=x^4+x^2y^2+x^3y$. Soluția ecuației, scrisã sub formã implicitã va fi deci $x^4+x^2y^2+x^3y=C$. Ea este şi soluția ecuației inițiale.

4.4 Ecuatii de tip Bernoulli

Forma generalã este $y'=P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^{\alpha}$, unde $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$ şi $P,Q:I\to R$ sunt funcții date, continue pe *I*.

Pentru $a>0$ ecuația are soluția singulară $y:I\to R$, $y(x)=0$.

Prin schimbarea de funcție $z=y^{1-\alpha}$ se obține o ecuație liniarã. Dacă soluția ecuației liniare este z_g atunci soluția ecuației inițiale este $y=z_g{}^{\alpha-1}$.

Exemplu : $y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y}$.

In acest caz $\alpha=1/2$. Se foloseşte substituția $z=y^{1-1/2}=y^{1/2}$. Rezultã $y=z^2$ şi $y'=2\cdot z\cdot z'$.

Ecuația devine $2\cdot z\cdot z'=\frac{4}{x}z^2+xz$, adicã $z\left(2z'-\frac{4}{x}z-x\right)=0$.

Din soluția $z=0$ rezultã soluția singularã $y=0$.

Ecuația liniarã $z'=\frac{2}{x}z+\frac{x}{2}$ are soluția $z(x)=\left(\frac{1}{2}\ln x+K\right)\cdot x^2$ care conduce la $y(x)=\left(\frac{1}{2}\ln x+K\right)^2\cdot x^4$.

4.5. Ecuatii de tip Ricatti

Forma generala este $y'+P(x)\cdot y^2+Q(x)\cdot y+R(x)=0$

Aceste ecuații se pot rezolva numai dacã se cunoaşte mãcar o soluție particularã a lor :

- dacã se cunoaşte o soluție $y_1(x)$, prin transformarea $y=y_1+1/z$ se obține o ecuație liniarã şi neomogenã ;
- dacã se cunosc douã soluții y_1 şi y_2, prin schimbare de variabilă $z=\frac{y-y_1}{y-y_2}$ se obține o ecuație liniarã şi omogenã ;
- dacã se cunosc trei soluții y_1,y_2,y_3 atunci soluția se obține direct din relația $\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C$.

Exemplu : Sã se rezolve ecuația $y'+\frac{1}{x^3-1}y^2-\frac{x^2}{x^3-1}y-\frac{2x}{x^3-1}=0$

a) ştiind cã admite soluția $y_1=-x^2$;

b) ştiind cã admite soluțiile $y_1(x)=-x^2$ şi $y_2(x)=-1/x$;

c) ştiind cã admite trei soluții $y_1(x)=-x^2$, $y_2(x)=-1/x$ şi $y_3(x)=x+1$.

a) Dacã se cunoaşte numai soluția y_1 se face schimbarea de variabilã $y=\frac{1}{z}-x^2$ adicã $y'=-\frac{1}{z^2}z'-2x$.

Se obține ecuația $(x^3-1)\left(-\frac{1}{z^2}z'-2x\right)+\left(\frac{1}{z}-x^2\right)^2-x^2\left(\frac{1}{z}-x^2\right)-2x=0$ din care, dupã efectuarea calculelor rezultã ecuația liniarã $z'+\frac{3x^2}{x^3-1}z-\frac{1}{x^3-1}=0$ cu soluția $z=\frac{k+x}{x^3-1}$. Rezultã $y=\frac{-1-kx^2}{x+k}$.

b) Dacã se cunosc douã soluții se face substituția $z=\frac{y+x^2}{y+1/x}$ adicã $y=\frac{z-x^3}{x(1-z)}$ şi $y'=\frac{(z'-3x^2)x(1-z)-(z-x^3)(1-z-xz')}{x^2(1-z)^2}$. Introducând aceste expresii în ecuația diferențialã obținem (dupã calcule) ecuația liniarã $z'=\frac{z}{x}$ care are soluția $z=cx$. Rezultã $y=\frac{c-x^2}{1-cx}$. Observãm ca soluția obținutã coincide cu cea de la a) dacã considerãm $c=-1/k$.

c) dacã se cunosc y_1, y_2, y_3, soluția generalã se obține direct din formula $\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=k$ de unde rezultã $y=\frac{x^2-k}{kx-1}$.

4.6. Ecuatii de tip Lagrange

Forma generalã este $y=x\cdot A(y')+B(y')$, unde $A(y')\neq y'$

Se deriveazã ecuația şi se noteazã $y'=p$.

Se obține o ecuație liniarã cu funcția necunoscutã x şi variabila independentã p.

Aceastã ecuație are solutia de forma

$x = x(p)$ iar soluția generalã a ecuației Lagrange se dã în formã parametricã
$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = x(p)A(p) + B(p) \end{cases}$$

Exemplu : Sã se rezolve ecuația $y = x \cdot (y')^2 - y'$.

Prin derivarea ecuației se obține $y' = (y')^2 + 2xy'y'' - y''$. Se noteazã $y' = p$ şi se ajunge la ecuația $p - p^2 = (2px - 1)p'$ în care p este funcție de x. Dacã se considerã x ca funcție de p (se inverseazã aplicația p) şi se ține cont de faptul cã $x' = 1/p'$ (din formula de derivare a funcției inverse) se obține ecuația liniarã $x' + \dfrac{2x}{p-1} - \dfrac{1}{p(p-1)} = 0$ pentru $p(p-1) \neq 0$.

Rezultã $x = (C + \ln p)/(p-1)$ şi soluția ecuației este datã parametric prin

$$x = (C + \ln p)/(p-1), \quad y = p^2 (C + \ln p)/(p-1) - p .$$

Pentru $p = 0$ şi $p = 1$ se obțin douã soluții singulare : $y = K$ şi $y = x + L$.
Înlocuind aceste funcții în ecuația inițialã se obține $K = 0$, respectiv $L = -1$. Deci soluțiile particulare vor fi $y = 0$ şi $y = x - 1$.

4.7. Ecuatii de tip Clairaut

Ecuațiile de tip Clairaut au forma generalã $y = xy' + B(y')$.
Notând $y' = p$ ecuația devine $y = xp + B(p)$. Prin derivarea sa se obține ecuația $p' \cdot (x + B'(p)) = 0$.
Dacã $p'(x) = 0$ se obține soluția (generalã) $y(x) = Cx + B(C)$
Din egalitatea $x + B'(p) = 0$ se obține soluția singularã $\begin{cases} x = -B'(p) \\ y = -B'(p)p + B(p) \end{cases}$ scrisã sub formã parametricã.
Exemplu : $y = xy' - (y')^2$

Soluția generalã este $y = Cx - C^2$ şi o soluție particularã este datã parametric de $\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases}$.

Soluția singularã scrisã sub formã explicitã este $y = x \cdot \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$

Exerciții propuse

Sã se rezolve urmãtoarele ecuații diferențiale sau probleme Cauchy:

1. $y' - y/x = 0$ **R :** $y = Cx + x^2$

2. $y' - 2y/x = x^3$ **R :** $y = x^4/6 + C/x^2$

3. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$ **R :** $y = e^x/x - \left(ab - e^a\right)/x$

4. $y' - y/\left(1 - x^2\right) - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0$ **R :**
$$y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1,1)$$

5. $y' \cos^2 x + y = tgx, \quad y(0) = 0$ **R :** $y = x/\cos x$, $\quad x \in [0, \pi/2)$

6. $xy' - y = y^3$ **R :** $y = Cx/\sqrt{1 - C^2x^2}$

7. $(x - y)y - x^2y' = 0$ **R :** $y = 1/\left(\ln|x| + C\right)$

8. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = ax$ **R :** $y = a + C\sqrt{x^2 - 1}$

9. $xy' - 2y = x^3/2$ **R :** $y = x^3/2 + Kx^2$

10. $y' - 2xy = x^3$ **R :** $y = \left(x^2 - 1\right)/2 + Ce^{-x^2}$

11. $xy' - y = \ln x$ **R :** $y = -\ln x - 1/(2x) + Cx$

12. $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$ **R :** $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 = C$

13. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ **R :** $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$

14. $xy' = y, \quad y(1) = 0$ **R :** $y = 0$

15. $xy' = y, \quad y(1) = 1$ **R :** $y = x$